Planche n° 25. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**)

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Exercice n° 2 (*T)**

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6 \mid 5n^3 + n$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7 \mid 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

Exercice n° 3 (*IT)**

Montrer qu'un entier de la forme $8n + 7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Exercice n° 4 (IT)'**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que PGCD $(a_n, b_n) = 1$.

Exercice n° 5 (****)

Montrer que, pour tout entier naturel n, 2^{n+1} divise $E\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right)$.

Exercice n° 6 (*IT)**

Soient A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B. (Commencer par majorer la somme des chiffres de $n = c_0 + 10c_1 + \ldots + 10^p c_p$.)

Exercice n° 7 (**)

Montrer que si p est premier et $8p^2 + 1$ est premier alors $8p^2 - 1$ est premier.

Exercice n° 8 (I)**

1) Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \left[k \wedge n = 1 \Rightarrow n \mid \binom{n}{k}\right]$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1) \mid \binom{2n}{n}$.

Exercice n° 9 (T)**

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x, y) = 105 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{l} \text{PGCD}(x, y) = x - y \\ \text{PPCM}(x, y) = 72 \end{array}\right. \qquad 3)\ \text{PPCM}(x, y) - \text{PGCD}(x, y) = 243.$$

Exercice n° 10 (***)

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Exercice n° 11 (*IT)**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice n° 12 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{PGCD}\,(u_n, u_{n+1}) = 1$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1}u_n$ et en déduire que PGCD $(u_m, u_n) = u_{\text{PGCD}(m,n)}$ pour m et n non nuls.

Exercice n° 13 (*I)**

On veut résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3, 4, 5)$).

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\mathrm{PGCD}(x, y, z) = 1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.

2) On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x, y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.

On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y = 2y'$, $X = \dfrac{z+x}{2}$ et $Z = \dfrac{z-x}{2}$.

3) Montrer que $\mathrm{PGCD}(X, Z) = 1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.

4) En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$\left(d\left(u^2 - v^2\right),\ 2duv,\ d\left(u^2 + v^2\right)\right)$$

où $d \in \mathbb{N}$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

Exercice n° 14 (**)

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$.

Exercice n° 15 (***)

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation d'inconnue (x, y) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{x} k! = y^2$.

Exercice n° 16 (***)

Montrer que $n = 4...48...89$ (p chiffres 4 et $p-1$ chiffres 8 et donc $2p$ chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

Exercice n° 17 (*I)**

Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple, $37 \times 1 = 37$, $37 \times 2 = 74$, $37 \times 3 = 111$).

Exercice n° 18 (***)

Soit $u_n = 10...01_2$.(n chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

$$1) u_n^2\ 2)\ u_n^3\ 3) u_n^3 - u_n^2 + u_n.$$

Exercice n° 19 (I)**

1) Déterminer en fonction de n entier non nul, le nombre de chiffres de n en base 10.

2) Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10.

a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n \geq 1}$ est bornée. Cette suite converge-t-elle ?

b) Montrer que pour tout naturel non nul n, $1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \log n)$.

c) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Exercice n° 20 (*I)**

1) (Formule de Legendre) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Etablir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + E\left(\frac{n}{p^3}\right) + ...$$

2) Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de $1000!$?

Exercice n° 21 (*I)** (Petit théorème de Fermat) Soit p un nombre premier.

1) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise $\dbinom{p}{k}$.

2) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$ (par récurrence sur a).

Exercice n° 22 (*I)** (Théorème de Wilson)

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $(p-1)! \equiv -1\ (p) \Rightarrow p$ est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).

